8 MAKSİMİZASYON VE MİNİMİZASYON

Bir fonksiyonun maksimum noktası nasıl bulunur? Bu soruya daha önceden matematik dersi almış olan öğrencilerin bir bölümü doğru cevap vereceklerdir: “Fonksiyonun türevini alıp, sıfıra eşitleyerek.” Peki ama neden? Bu soruya doğru cevap verenlerin sayısı ise daha az olacaktır. İşte bu sebepledir ki Bölüme bir fonksiyonun maksimum veya minimum noktasını bulmak için kullanılan yöntemleri ve nasıl kullanıldıklarını açıklayarak başlayacağız.

Maksimizasyon ve minimizasyon konuları mikro ekonomi teorisinin esasını oluşturur. Tüketiciler tüketim sonucunda sağlayacakları faydanın, işletmeler üretim sonucunda elde edecekleri kârın mümkün olan en yüksek seviyede gerçekleşmesini arzu ederler. Diğer yandan tam rekabet şartlarını taşıyan bir piyasada firmalar, ortalama masraflarının en az olduğu üretim seviyesinde faaliyetlerini sürdürmek isterler. İster maksimizasyon ister minimizasyon olsun, bütün modellerde amaçlanan sonuçlara erişilmesi bir takım **kısıtlayıcı şartlar**a tabidir. Tüketiciler maksimum faydalarını gözetirken bütçeleri onları kısıtlar. İşletmeler ortalama masraflarını en aza indirmek isterken, sahip oldukları teknoloji seviyesi belirleyici bir kısıttır.

Ekonomide yukarıdaki türden maksimizasyon ve minimizasyon işlemleri, “en iyiyi elde etme” anlamında *optimizasyon* başlığı altında toplanmaktadır. Matematik açıdan maksimizasyon ve minimizasyon terimleri herhangi bir optimizasyon anlamı içermez. Matematikte maksimizasyon ve minimizasyonun için ortak terim, **ekstremum** yani **uç değer**dir (Chiang and Wainwright 2005, s: 251).

Bölümde maksimizasyon ve minimizasyon modellerinin açıklanmasına tek değişken girdili fonksiyonlarla başlanacaktır. Daha sonra kısıtlayıcı faktörler eşliğinde çok değişkenli fonksiyonlar ele alınacaktır. Ekonomi analizlerinde bu tekniklerin kullanıldığı alanlar çok fazladır. Bu tekniklerin öğrenilmesi ile ekonomi ile ilgili incelemelerimizin daha rahat takip edilmesi mümkün olacaktır.

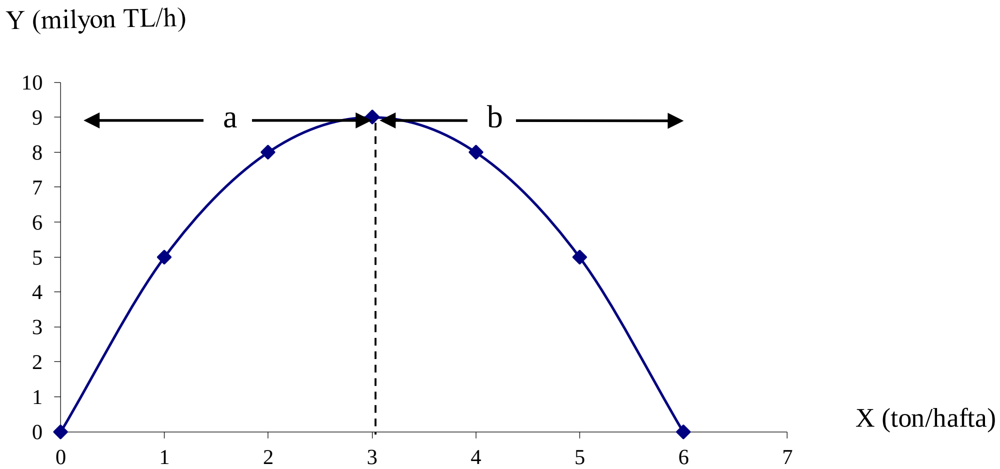
8.1 Basit Maksimizasyon Problemi

Aşağıdaki fonksiyonda bağımsız değişken üretim miktarını (x, ton/hafta), bağımlı değişken de kârı (y, milyon TL/hafta) göstermektedir:

$$y = 6x - x^2$$

Ekonomi teorisinde değişkenlerin (üretim girdileri, fiyatlar, masraflar vb.) genellikle pozitif değerler taşıdığı dikkate alınarak yukarıdaki fonksiyonu $[0;6]$ aralığında inceleyelim. Fonksiyonun eğimi, bağımsız değişkenin $[0;3)$ aralığındaki değerleri için pozitif, $(3;6]$ aralığındaki değerleri için negatiftir (Şekil 8.1). Başlangıçta eğrinin eğimi pozitiftir ve giderek azalmaktadır. Bağımsız değişkenin 3'ten büyük değerleri için fonksiyonun eğimi negatiftir ve eğri giderek dikleşmektedir. Fonksiyonun eğimi $x < 3$ iken pozitif ve $x > 3$ iken negatif olduğuna göre $x = 3$ noktasında sıfırdır.

Bir fonksiyonun eğiminin onun türevi olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki fonksiyona benzer[*] fonksiyonların maksimum veya minimum noktalarında eğimleri sıfırdır. Şu halde eğimi gösteren türev alınıp sıfıra eşitlenirse, eğriyi maksimum veya minimum yapan x'in değeri elde edilir (Pfitzner 2002, s. 80). Yukarıdaki fonksiyona bu kuralı uygulayalım:



Şekil 8.1 $y = 6x - x^2$ Fonksiyonunun Maksimum Noktası (3; 9)

[*] Bazı fonksiyonların maksimum ve minimum noktaları bu şekilde belirlenemez (Bakınız: Kısım 8.3).

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 6 - 2x$$

Birinci türevi sıfıra eşitleyip x değerini bulalım:

$$6\text{-}2x = 0 \Rightarrow x = 3$$

x =3 olan noktada fonksiyonun eğimi sıfırdır. Bu değer fonksiyonda $(y = 6x - x^2)$ yerine konulursa maksimum değeri bulunur:

$$y_{\max} = (6)(3) - 3^2 = 18 - 9 = 9$$

Fonksiyonun maksimum noktasını bulmak için birinci şartı yerine getirmiş bulunuyoruz. Bu gereklidir, ama yeterli değildir. Bulunan nokta maksimum olabileceği gibi minimum nokta da olabilir. Fonksiyonun maksimum noktasının elde edilip edilmediği ikinci bir testten sonra anlaşılacaktır. Bu test, türevin türevini alarak yapılır. Eğer ikinci türevin işareti negatif ise $(\frac{d^2y}{dx^2} < 0)$ elde edilen nokta maksimum noktadır. İkinci türevin işareti pozitif ise $(\frac{d^2y}{dx^2} > 0)$ nokta, fonksiyonun minimum noktasıdır. Fonksiyonun ikinci türevinin negatif olması $(\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} = -2 < 0)$, $x = 3$ noktasında maksimum değere ulaştığını göstermektedir.

Bir fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerinin işaretlerine bakılarak fonksiyonun artan veya azalan olduğunu anlamak mümkündür (Tablo 8.1).

Tablo 8.1 Birinci ve İkinci Türevler ve Fonksiyondaki Değişmeler

Birinci türev (f_x)	İkinci türev (f_{xx})	Fonksiyondaki değişme
Pozitif	Negatif	Fonksiyon azalan bir hızla artıyor (Şekil 8.1 a)
Negatif	Negatif	Fonksiyon artan bir hızla azalıyor (Şekil 8.1 b)
Negatif	Pozitif	Fonksiyon azalan bir hızla azalıyor (Şekil 8.2 c)
Pozitif	Pozitif	Fonksiyon artan bir hızla artıyor (Şekil 8.2 d)

8.2 Basit Minimizasyon Problemi

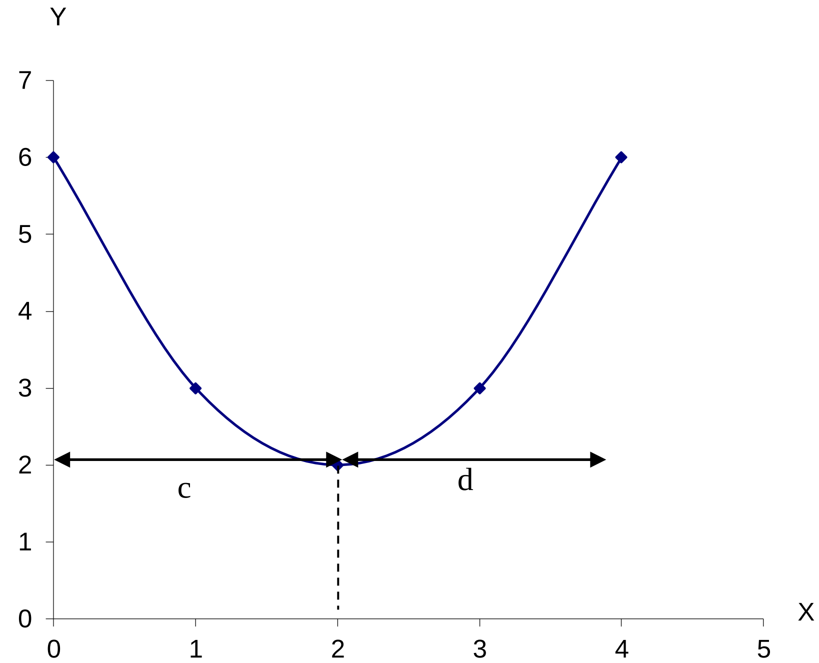
Ortalama masraf eğrisini gösteren aşağıdaki fonksiyonu ele alalım:

$$y = x^2 - 4x + 6$$

Fonksiyonun birinci türevini alarak sıfıra eşitleyelim ve x'in değerini bulalım:

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 2x - 4 = 0$$

Bulunacak x değeri 2'dir ve bu noktada fonksiyonun (y) değeri 2'ye eşittir. İkinci türevin değeri pozitif olduğuna göre ($\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} = 2 > 0$) fonksiyon $x = 2$ noktasında minimum değer alır. Ortalama masraf eğrisinin minimum noktası Şekil 8.2'de gösterilmiştir.



Şekil 8.2 $y = x^2 - 4x + 6$ Fonksiyonunun Minimum Noktası $(2;2)$

8.3 İlaveler ve İstisnalar

Buraya kadar verilen örneklerdeki fonksiyonların sadece bir tane maksimum veya bir tane minimum noktası vardı. Bir fonksiyonun birden fazla maksimum veya birden fazla minimum noktası olabilir. Bunlara kısaca fonksiyonun ekstremumları (uç değerleri) denir (Pfitzner 2002, s: 86-89).

8.3.1 Yerel maksimum ve yerel minimum

Aşağıdaki fonksiyonun ekstremumlarını bulmaya çalışalım:

$$y = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 20$$

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 3x^2 - 3x - 6 = 0$$

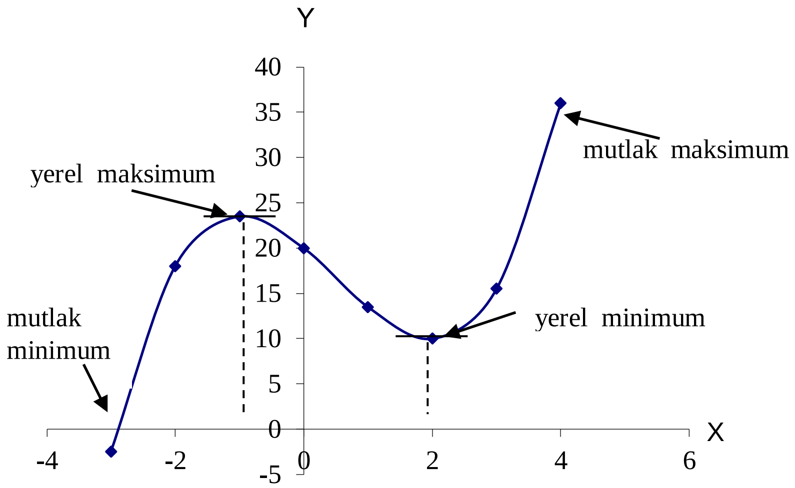
$$3(x-2)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} = 6x - 3$$

Bağımsız değişkenin yukarıdaki değerleri fonksiyonun kritik noktalarını oluşturur. x = 2 iken fonksiyonun ikinci türevi pozitif, x = -1 ise fonksiyonun ikinci türevi negatiftir. Birinci durumda fonksiyonun yerel minimumu, ikinci durumda yerel maksimumu vardır. Fonksiyonun $[-1;\ 2]$ aralığında ise aynı noktaların, mutlak ekstremumlar olduğuna dikkat ediniz (Şekil 8.3).

Ekonomide genellikle fonksiyonların negatif bölümleri anlam ifade etmez, çünkü bağımsız değişkenler (örneğin girdiler veya üretim miktarları) negatif değerler almazlar. Bunu matematik olarak sağlamak da mümkündür. Bunu sağlamak için yukarıdaki örnekle ilgili analizin, $0 \leq x \leq 2$ aralığı ile sınırlandırılması yeterlidir. Bir fonksiyonun herhangi bir aralığında ekstremumu araştırılırken, fonksiyonun sınır noktalarındaki değerlerinin de (örneğimizde 0 ve 2) kontrol edilmeleri gerekir.



Şekil 8.3 Fonksiyonun ($y = x^3 - 1.5x^2 - 6x + 20$) Ekstremumları

8.3.2 Büküm noktası

Maksimum veya minimum noktalarını bulmak için yeterli şart, fonksiyonun ikinci türevinin negatif veya pozitif olmasıdır. İkinci türevin sıfıra eşit olması, büküm noktasını gösterir. Aşağıdaki örneği inceleyelim:

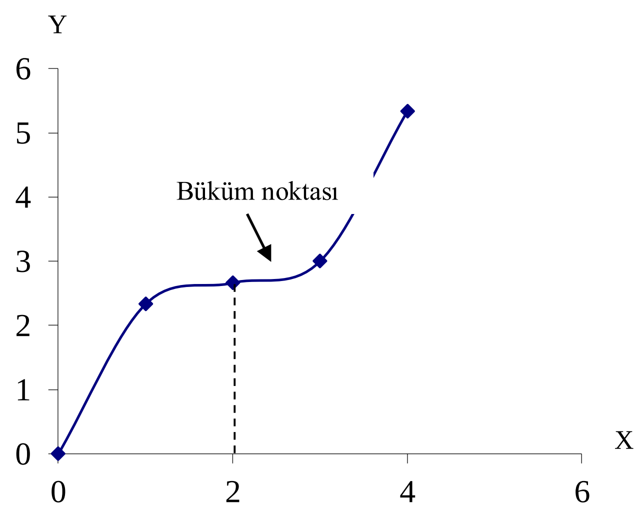
$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = f_x = x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} = 2x - 4$$

Birinci türev testinde bulunan x in değeri (2), fonksiyonun ikinci türevinde yerine konursa sonuç sıfırdır. Bu durumda ikinci türev testi başarısızdır, dolayısı ile bu noktada yerel maksimum veya yerel minimumdan söz edilemez (Şekil 8.4).



Şekil 8.4 Fonksiyonun ($y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x$) Büküm Noktası

8.3.3 Türev fonksiyonunun süreksizliği

Bazı fonksiyonlar, bağımsız değişkenin her değeri için tanımlı değildirler. Aşağıdaki örneği ele alalım.

$$y = (x-1)^{2/3} + 2$$

Fonksiyonun birinci türevi:

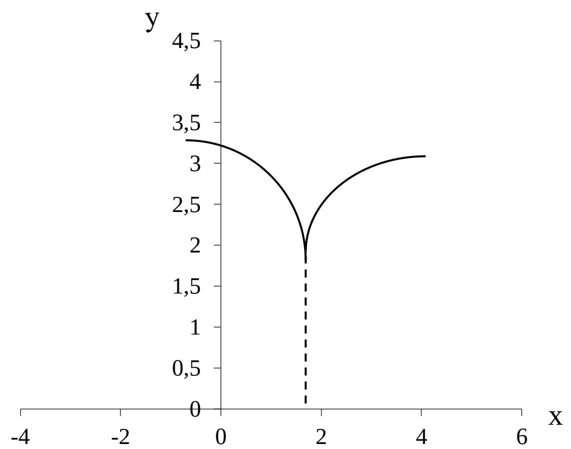
$$\frac{dy}{dx} = f_x = \frac{2}{3\,(x-1)^{1/3}}$$

Bağımsız değişken 1'e eşit iken, fonksiyonun birinci türevinin tanımsız olduğuna dikkat ediniz. Türev fonksiyonu, x=1 iken süreksizdir (Şekil 8.5).

8.4 Genel Ekstremum Kuralları

Ekonomi konularında maksimum veya minimum noktaları ile sıkça karşılaşılmaktadır. Birinci türev testinin başarısız olduğu durumlar ise nadirdir. Matematiğin ekonomiye uygulanmasında ikinci türev testi de genellikle olumlu çıkacaktır. Ama unutulmaması gerekir ki istisnalar daima vardır (Pfitzner 2002, s.90).

Ekonomide ekstremum değerleri bulmanın adı "optimizasyon"dur. Çünkü aranan "en iyi" dir; maksimum fayda, maksimum kâr, minimum masraf gibi. Şimdi bunun için işlem basamaklarını görelim.



Şekil 8.5 $y = (x-1)^{2/3} + 2$ Fonksiyonunun Grafiği

$y = f(x)$ fonksiyonunun maksimum noktasını bulmak için yapılacak ilk iş, fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan x değerini bulmaktır.

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$$

Birinci türev testi. x değişkeninin solunda ve sağında ona çok yakın bir noktadan (x = a) geçerken fonksiyonun aldığı değerlere bakılır. Bu noktada soldan sağa geçerken türevin işareti değişiyorsa, fonksiyonun birinci türevini sıfır yapan x değerinde en azından bir ekstremumu olduğu anlaşılır. Yani:

$$x < a \text{ iken } \frac{dy}{dx} > 0$$

$$x > a \text{ iken } \frac{dy}{dx} < 0$$

ise fonksiyonun x = a noktasında mutlak bir maksimumu vardır. Eğer:

$$x < a \text{ iken } \frac{dy}{dx} < 0$$

$$x > a \text{ iken } \frac{dy}{dx} > 0$$

ise bu defa x = a noktasında fonksiyonun mutlak bir minimumu vardır.

İkinci türev testi: Birinci türevin sıfıra eşit olduğu x değerinde ikinci türev negatif ise, fonksiyonun mutlak bir maksimum değeri var demektir. Bu noktada ikinci türev pozitif çıksaydı mutlak bir minimumdan söz edecektik. Belirtilen özellikler matematik sembollerle aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} < 0$$

ise fonksiyonun bu noktada mutlak bir maksimumu vardır.

$$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} > 0$$

ise fonksiyonun bu noktada mutlak bir minimumu vardır.

Birinci türevin sıfır olduğu noktada ikinci türev de sıfır ise, ikinci türev testi başarısızdır. Bu durumda yukarıda açıklanan birinci türev testinin uygulanması gerekir.

Tablo 8.2 Ekstremumlar için Gerekli ve Yeterli Şartlar (Pfitzner 2002, s. 92)

Şartlar	Maksimum	Minimum
Birinci test (gerekli şart)	$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$	$\frac{dy}{dx} = f_x = 0$
İkinci test (yeterli şart)	$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} < 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} = f_{xx} > 0$

Belirtilen noktalar, fonksiyonların mutlak maksimum veya minimum noktaları olmayabilir. Fonksiyon bağımsız değişkenin belli bir aralığı için ($b \leq x \leq a$) tanımlanmışsa, x'in alacağı uç değerler için de inceleme yapmak gerekir.

Son olarak belirtmek gerekir ki, ekonomide bir fonksiyonun değişken girdinin hangi aralığında anlamlı olduğu ve şekli genellikle teoriden bilinir. Örneğin kâr fonksiyonu ve ortalama masraf fonksiyonunun alacağı şekiller teorik olarak bilinmektedir. Bunlardan birincisinde mutlak maksimum, ikincisinde ise mutlak minimum noktaları önem taşımaktadır, yani ekonomik açıdan anlamlıdırlar. Bu bilindiğinden, ikinci türev testine gerek kalmamaktadır.

Yapılan açıklamalar neticesinde matematik-ekonomide sıkça kullanılan iki kavram daha ortaya çıkmıştır: ***gerekli şart*** ve ***yeterli şart***. Maksimum ve minimum problemlerinde olduğu gibi gerekli şartın yerine gelmesi yeterli olmayabilir. Bir olayın gerçekleşmesi için hem gerekli hem de yeterli şartlar sağlanmalıdır. Örneğin maksimum nokta için birinci türevin sıfır olması gereklidir ama yeterli değildir, bu nokta minimum nokta veya büküm noktası da olabilir. Bu durumda yeterli şart ikinci türevin negatif olmasıdır (Tablo 8.2).

8.5 İki Değişkenli Fonksiyonların Uç Değerleri

Önceki bölümde bir bağımsız değişkenli fonksiyonlarda ekstrem noktaların nasıl bulunacağı açıklanmıştı. Ekonomideki modellerde çoğu kez birden fazla bağımsız değişkenin etkisi söz konusu olmaktadır. Şimdi iki değişkenli fonksiyonlarda maksimum ve minimum noktalarının nasıl bulunacağı üzerinde duralım. $z = f(x, y)$ ile ifade edilen fonksiyonu ele alalım. Çizimi yapıldığında bağımlı değişken z'nin alacağı değerler, bir doğru veya eğri ile değil, üç boyutlu bir düzlemle ifade edilir.

İki değişken girdili fonksiyonlarda uç değerlerinin bulunmasında da, bir değişkenli fonksiyonların uç değerlerinin bulunmasındaki sıra takip edilir. Birinci türev alınır ve sıfıra eşitlenir. Sonra ikinci türev alınır ve birinci türevi sıfır yapan x'in değerleri ikinci türevde yerine konur. Bağımsız değişken sayısı birden fazla olduğundan, alınacak türevler kısmî türevler olacaktır. İkinci türevin işareti negatif ise mutlak bir maksimumdan, pozitif ise mutlak bir minimumdan söz edilebilir ancak bunun için tek bağımsız değişkenli fonksiyondaki şartlara ilave olarak üçüncü bir test daha yapılmalıdır: **çapraz kısmî türev testi**. İki değişkenli bir fonksiyona, değişkenlerden birine göre (örneğin x) kısmî türev uygulandıktan sonra elde edilen sonuca ikinci değişkene göre (örneğin y) uygulanan kısmî türeve, çapraz kısmî türev (f_{xy}) denir (Chiang 1994, sayfa: 313). İki bağımsız değişkenli bir fonksiyonda ekstremumların varlığına (maksimum veya minimum), çapraz kısmî türev testi pozitif ise karar verilir.

Çok değişkenli fonksiyonlarda $(f_{xy}) = (f_{yx})$ tir, buna ***Young*** **Teoremi** denir (Pfitzner 2002, s: 94). Bu teoreme göre çapraz kısmî türevlerde, türevin önce hangi değişkene göre alındığı önemli değildir, her iki durumda da çapraz türevler eşit olacaktır. Çapraz kısmi türev testi başarısız ise (sonuç negatif ise), fonksiyonun ekstremumundan söz edilemez. Çapraz kısmi türev testi sıfır çıkarsa test, değişkenlerin yakın değerleri için tekrarlanmalıdır. İki değişkenli fonksiyonlarda ekstremumların nasıl hesaplanacağı Tablo 8.3'de gösterilmiştir.

Tablo 8.3 İki Değişkenli Fonksiyonların Uç Değerleri

Şartlar	Maksimum	Minimum
Gerekli şart	$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_x = f_y = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_x = f_y = 0$
Yeterli şartlar	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} < 0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} < 0$ ve $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} > 0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} > 0$ ve $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$

Kaynak: Chiang A.C. and Wainwright K. 2005, Matematiksel İktisadın Temel Yöntemleri. Çeviren: Muzaffer Sarımeşeli ve Şenay Açıkgöz, Gazi Kitabevi, Ankara (s: 338)

Örnek 8.1 $z = 10x - x^2 + 10y - y^2$ fonksiyonunun ekstremumlarını araştırınız.

Birinci şart ; birinci kısmî türevler testi :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10 - 2x = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 10 - 2y = 0;$$
$$x = 5 \qquad\qquad y = 5$$

(5;5) noktası maksimum veya minimum olabilir. Bunu anlamak için ikinci türevlerin ve çapraz türevin işaretlerine bakılmalıdır.

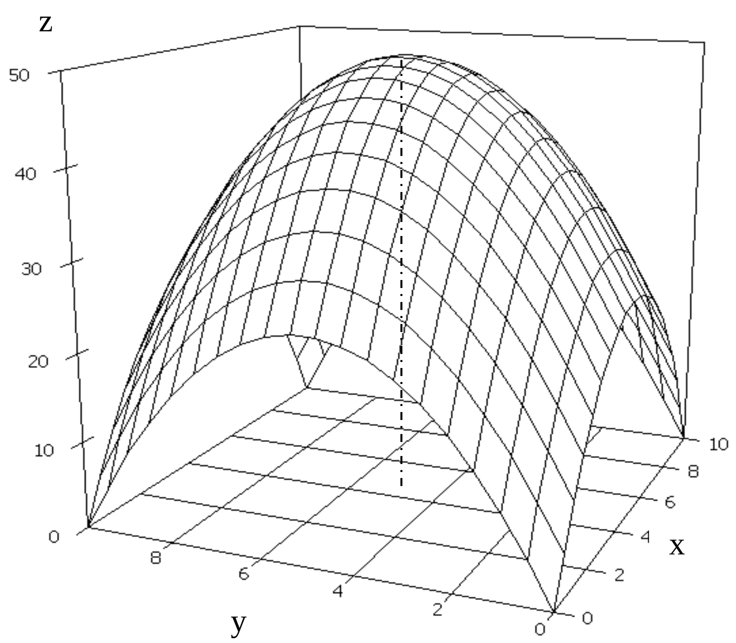
İkinci kısmî türevler testi : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2$

Çapraz kısmî türev testi : $(f_{xy}) = (f_{yx}) = 0$

$$(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$$

$$(-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$$

Çapraz kısmi türev testi pozitif, ikinci kısmi türev testlerinin sonuçları negatif olduğundan (5;5) noktasında fonksiyonun maksimum değerine (50) ulaştığına karar verilir (Şekil 8.6).



Şekil 8.6 $z = 10x - x^2 + 10y - y^2$ Fonksiyonunun Grafiği

<u>Örnek 8.2</u> $z = x^2 - y^2$ fonksiyonunun ekstremumlarını araştırınız.

Birinci test :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0;$$
$$x = 0 \qquad y = 0$$

İkinci testler:

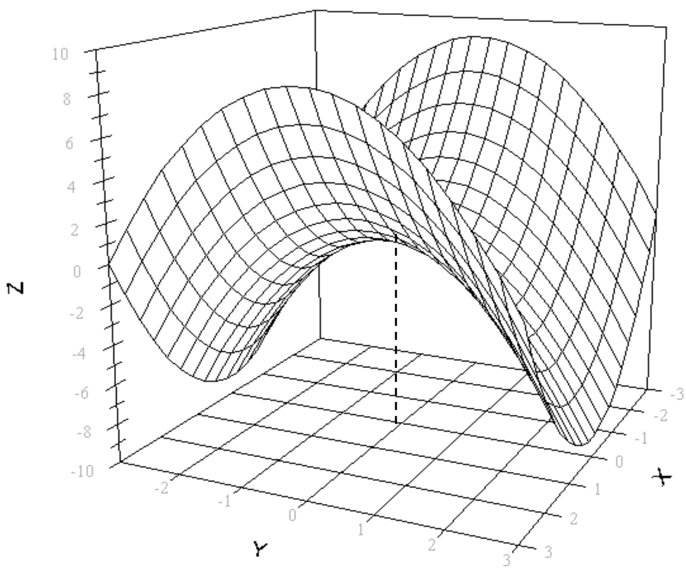
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = 2\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = -2$$

ve

$$(f_{xy}) = (f_{yx}) = 0$$

$$(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = (2)(-2) - (0)^2 = -4 < 0$$

Çapraz kısmi türev testi negatif olduğundan (0;0) noktasında fonksiyon maksimum veya minimum değildir (Şekil 8.7). Nitekim ikinci türev testlerinin işaretleri de farklıdır. Bu noktaya, **eyer noktası** denir (Chiang and Wainwright, 2005, s: 333).



Şekil 8.7 Eyer Noktası $(Z = x^2 - y^2)$

<u>Örnek 8.3</u> $z = x^2 - xy + y^2 - 9x + 50$ fonksiyonunun uç değerlerini araştırınız.

Birinci test:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 9 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y = 0;$$

x= 6 ve y = 3 bulunur.

İkinci testler:

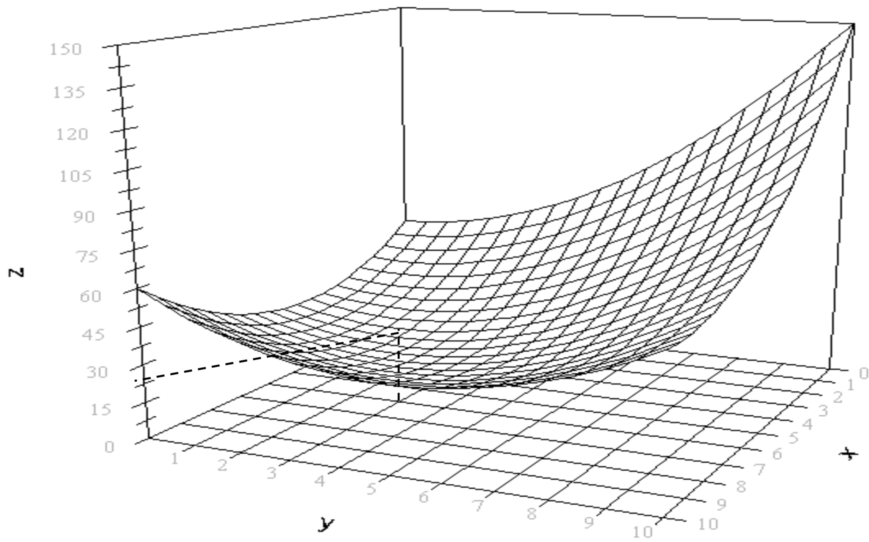
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx} = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy} = 2$$

$$(f_{xy}) = (f_{yx}) = -1$$

$$(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = (2)(2) - (-1)^2 = 3 > 0$$

Sonuç: (6;3) noktasında fonksiyonun mutlak bir minimumu vardır: $z_{\min} = 23$ (Şekil 8.8).



Şekil 8.8 $z = x^2 - xy + y^2 - 9x + 50$ Fonksiyonunun Minimum Değeri $(z = 23)$

8.6 Kısıtlayıcı Faktörler Eşliğinde Ekstremum

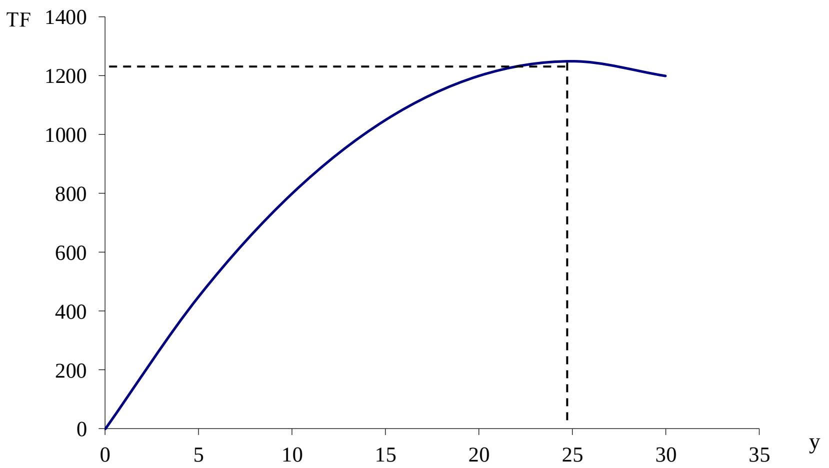
Bölümün başında da belirtildiği gibi ekonomi problemlerinin çoğunda maksimum veya minimuma ulaşmak, bir takım kısıtlayıcı faktörlerin sağlanmasına bağlıdır. Faydayı maksimize ederken bütçe sınırı (bütçe doğrusu) vardır, üretimi maksimum yapmak harcanabilecek maksimum paraya (eş maliyet doğrusu) bağlıdır, masraf minimizasyonunda ise üretim miktarı bir kısıtlayıcıdır.

U = xy biçiminde bir fayda fonksiyonunun ele alalım. Fonksiyonda U, toplam faydayı, x ve y de tüketilen ürün miktarlarını göstermektedir. x in fiyatı 1, y nin fiyatı 2, tüketicinin bu iki ürünün tüketimi için ayırdığı bütçe 100 ise fayda fonksiyonu için bütçe kısıtı 100 = 1x + 2y dir. Bu problem çeşitli yöntemlerle çözülebilir. Bunlardan ilki, ikinci eşitliği x veya y değişkenlerinden birine göre çözerek birinci eşitlikte (toplam fayda fonksiyonu) yerine koymaktır: x = 100 – 2y ve buradan U = 100y – $2y^2$ bulunur. Fonksiyonun maksimum noktasını bulmak için 8.4'de olduğu gibi birinci türevini alıp sıfıra eşitleyelim. Daha sonra ikinci türevin işaretine bakalım:

$$\frac{dU}{dy} = 100 - 4y = 0 \;\Rightarrow\; y = 25; \;\; x = 50$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = f_{yy} = -4 < 0$$

Bu noktada toplam fayda en fazladır: $U_{\max}(50;25) = 1250$ (Şekil 8.9).



Şekil 8.9 Toplam Fayda Fonksiyonu ($U = 100y - 2y^2$)

Kısıtlayıcı faktör bir tane ve birinci mertebeden bir eşitlikle açıklanabiliyorsa bu yöntem yeterlidir. Daha karmaşık (ikinci dereceden) problemlerin çözümü için ***Lagrange Çarpanı*** kullanılması gerekir (Pfitzner 2002, s: 98-104).

8.7 Kısıtlı Ekstremum için Lagrange Çarpanı Yöntemi

Kısıtın kendisi basit olmayan bir fonksiyon olduğunda, yukarıdaki bölümde yapıldığı gibi "yerine koyma" tekniği ile amaç fonksiyonunun elde edilerek kısıtlı ekstremumun aranması güçleşebilir. Böyle durumlarda ***Lagrange çarpanı*** adı ile bilinen ve analitik üstünlükleri olan yöntem kullanılır.

$z = f(x, y)$ fonksiyonunun, $g(x, y) = c$ kısıtı altında (c, sabit bir sayı) uç noktalarını bulmak için fonksiyon ve kısıtı birlikte aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda\left[c - g(x, y)\right]$$

Eşitlikte köşeli parantez içinde verilen ifadenin sıfıra eşit olduğuna dikkat ediniz. Parantez içindeki ifade sıfıra eşit olduğundan her hangi bir parametre ile çarpıldığında (bu çarpana *Lagrange çarpanı* veya *belirlenmemiş çarpan* denir ve genellikle λ ile gösterilir), elde edilen yeni fonksiyon, başlangıç fonksiyonunun aynısıdır. Amaç fonksiyonunun, kısıtı ile birlikte yazıldığı fonksiyona Lagrange fonksiyonu denir.

Örnek 8.4 $z = x^2 + 4y^2 - xy$ fonksiyonunun, x + 2y =100 kısıtı altında ekstremumunu bulunuz.

Öncelikle Lagrange fonksiyonunu oluşturalım:

$$L\ (x, y) = x^2 + 4y^2 - xy + \lambda\ (100 - x - 2y)$$

Birinci test; birinci kısmî türevler:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L_x = 2x - y - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_y = 8y - x - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = 100 - x - 2y = 0$$

Bu üç eşitlikten $y = 25$; $x = 50$ ve $\lambda = 75$ bulunur.

İkinci test (ikinci kısmî türevler ve çapraz kısmî türev):

$$L_{xx} = 2 > 0 \ ; \ L_{yy} = 8 > 0 \ ; \ L_{xy} = -1 = L_{yx}$$
$$(L_{xx})(L_{yy}) - (L_{xy})^2 = (2)(8) - (-1)^2 > 0$$

Çapraz kısmi türev testi ve ikinci türevler pozitif olduğundan, koordinatları (50;25) olan noktanın, fonksiyonun minimum noktası olduğuna karar verilir. Bu noktada z = 3750 dir.

<u>Örnek 8.5</u> $z = x^2 + y^2 + xy$ fonksiyonunun, $2x - y = 7$ kısıtı altında ekstremumunu bulunuz.

$$L\ (x, y) = x^2 + y^2 + xy + \lambda\ (7 - 2x + y)$$

Birinci kısmî türevler :

$$\frac{\partial L}{\partial x} = L_x = 2x + y - 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = L_y = 2y + x + \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = L_\lambda = -2x + y + 7 = 0$$

Bu üç eşitlikten x = 2.5 ve y = -2 bulunur. İkinci kısmî türevler ve çapraz kısmi türev:

$$L_{xx} = 2 > 0 \ ; \ L_{yy} = 2 > 0 \ ; \ L_{xy} = 1 = L_{yx}$$
$$(L_{xx})(L_{yy}) - (L_{xy})^2 = (2)(2) - (1)^2 > 0$$

Çapraz kısmi türev ve ikinci türevler pozitif olduğundan, koordinatları (2.5; -2) olan nokta fonksiyonun kısıtlı minimum noktasıdır. Bu noktada z = 5.25’dir.

8.8 İkinci Mertebeden Toplam Diferansiyel ve Hessian Matrisi

Toplam diferansiyel (6.1.4) ve ikinci mertebe kısmî türev konularını öğrendikten sonra, ikinci mertebe toplam diferansiyel (d^2z) konusunu ele alabiliriz. $z = f(x,y)$ fonksiyonunun türevini alırken türev işleminin, fonksiyonun değişkenlerine ayrı ayrı uygulandığını hatırlayalım: $dz = f_x dx + f_y dy$. Eşitlikteki dx ve dy ifadeleri, x ve y deki belli değişmeleri ifade ettiğinden diferansiyel alınırken sabit kabul edilebilirler. Dolayısı ile dz, sadece f_x ve f_y ye bağlı olur. f_x ve f_y de x ve y nin fonksiyonları olduklarından, ikinci mertebeden diferansiyeli elde etmek için dz nin tekrar türevi alınır (Chiang 1994, s: 314):

$$
\begin{aligned}
d^2z = d(dz) &= \frac{\partial(dz)}{\partial x}dx + \frac{\partial(dz)}{\partial y}dy \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy \\
&= (f_{xx}dx + f_{xy}dy)dx + (f_{yx}dx + f_{yy}dy)dy \\
&= f_{xx}dx^2 + f_{xy}dydx + f_{yx}dxdy + f_{yy}dy^2 \\
&= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \qquad (f_{xy} = f_{yx})
\end{aligned}
$$

Yukarıda d^2z ifadesinde 2 üssü, z'nin ikinci mertebeden toplam diferansiyeli anlamına gelir. $dx^2 \equiv (dx)^2$ ifadesindeki 2 üssü ise, dx'in birinci mertebe diferansiyelinin karesidir. Son eşitliğin matris formunda yazılımı aşağıdaki gibidir:

$$d^2z = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

Ana köşegende ikinci mertebe kısmî türevlerin, diğer köşegende çapraz kısmî türevlerin yer aldığı matrisin determinantı, *Hessian* olarak adlandırılır:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Hessian determinantının ana köşegendeki birinci elemanı **birinci ana minör** (*first principal minor* $|H_1|$) olarak adlandırılır ve ana köşegenin birinci elemanının alt determinantıdır: $|H_1| = |f_{xx}|$. *Hessian* determinantının **ikinci ana minör**ü (*second principal minor* $|H_2|$), ana köşegenlerdeki elemanlardan oluşan 2x2 boyutundaki alt determinant olup, aynı zamanda *Hessian* matrisinin de determinantıdır (Chiang 1994, s: 333):

$$|H_2| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$z = f(x, y)$ fonksiyonunda $dz = 0$ yani $f_x = f_y = 0$ olduğunda; yerel minimum

$(d^2 z > 0)$ şartları: $|H_1| > 0$ ve $|H_2| > 0;\ \Big\}$ $|H_1| = f_{xx}$ ve $|H_2| = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$

yerel maksimum $(d^2 z < 0)$ şartları: $|H_1| < 0$ ve $|H_2| > 0$

Gerekli şartlar sağlandığı halde $|H_2| = |H| = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 < 0$ ise, kritik noktanın bir minimum veya maksimum olmayıp ***eyer noktası*** olduğuna hükmedilir (Hess 2002, s.235).

Bölümde 8.1-8.3 numaralı örnekleri *Hessian* uygulaması ile yeniden çözelim, sonuçların değişmediğini göreceğiz.

Örnek 8.6 $z = 10x - x^2 + 10y - y^2$ fonksiyonunun uç noktalarını *Hessian* matrisini kullanarak araştıralım:

Kritik noktaların bulunması için, fonksiyonun değişkenlere göre birinci mertebeden türevleri sıfıra eşitlenir:

$$z_x = 10 - 2x = 0$$

$$z_y = 10 - 2y = 0$$

Elde edilen eşitlik sistemini matris formunda yazalım:

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Çözüm vardır ve tektir, çünkü matrisin determinantı tekil değildir:

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Değişkenlerin değerlerini *Cramer* kuralı ile elde edelim:

$$\bar{x}_0 = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}}{4} = 5$$

$$\bar{y}_0 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -10 \\ 0 & -10 \end{vmatrix}}{4} = 5$$

Bulunan değişken değerleri z fonksiyonunda yerine konursa $z(5;5)$ noktasında fonksiyonun değeri elde edilir:

$$\bar{z}_0 = 10\,(5) - (5)^2 + 10\,(5) - (5)^2 = 50$$

z (5;5) noktasında fonksiyonun aldığı değerin maksimum mu, minimum mu olduğunu anlamak için *Hessian* determinantına bakalım:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Buradan $|H_1| = -2 < 0$ ve $|H_2| = |H| = (-2)(-2) - (0)^2 = 4 > 0$

Buna göre z (5;5) noktasında fonksiyonun bir maksimumu vardır.

<u>Örnek 8.7</u> $z = x^2 - y^2$ fonksiyonunun uç değerlerini *Hessian* determinantından yararlanarak inceleyelim.

$$z_x = 2x = 0$$
$$z_y = -2y = 0$$

Sistemi matris formunda yazıp, *Cramer* kuralına göre çözersek:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{-4} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{-4} = 0$$

Kritik noktanın (0;0) özelliğini anlamak için *Hessian* determinantlarını inceleyelim:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Buradan $|H_1| = 2 > 0$ ve $|H_2| = |H| = (2)(-2) - (0)^2 = -4 < 0$

Buna göre (0;0) noktasında, fonksiyonun maksimum veya minimumu yoktur (Şekil 8.7).

Örnek 8.8 $z = x^2 - xy + y^2 - 9x + 50$ fonksiyonunun ekstremum noktalarını *Hessian* determinantı yardımı ile inceleyelim.

$$z_x = 2x - y - 9 = 0$$
$$z_y = -x + 2y = 0$$

Sistemi matris formunda yazıp, *Cramer* kuralına göre çözersek:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ olduğuna göre çözüm vardır. Cramer kuralına göre:

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{3} = 6$$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = 3$$

Kritik noktanın (6;3) durumunu araştıralım:

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Buradan $|H_1| = 2 > 0$ ve $|H_2| = |H| = (2)(2) - (-1)^2 = 3 > 0$ Sonuç: (6;3) noktasında fonksiyon minimum bir değere sahiptir: $z_{\min}(6;3) = 23$ (Şekil 8.8).

8.9 Kısıtlı Extremum ve *Hessian* (Çitlenmiş Hessian)

Optimizasyon problemlerinde olduğu gibi, kısıtlayıcı faktörleri olan optimizasyon problemlerinde de *Hessian* matrisinden yararlanılabilir. Böyle durumlarda *Hessian* determinantı yerine, *kısıtlayıcı eşliğinde Hessian determinantı* (***çitlenmiş Hessian***) kullanılır.

$\alpha u+\beta v=0$ kısıtı altında $q=au^2+2huv+bv^2$ kuadratik fonksiyonunu inceleyelim. Yukarıdaki eşitliklerde u ve v değişkenler; α,β,a,b ve h ise katsayılardır. Kısıt eşitliğinde v'nin değerini bulup fonksiyonda yerine yazalım:

$$v=-(\alpha/\beta)u$$

$$q=au^2-2h\frac{\alpha}{\beta}u^2+b\frac{\alpha^2}{\beta^2}u^2=(a\beta^2-2h\alpha\beta+b\alpha^2)\frac{u^2}{\beta^2}$$

q değerinin mutlak pozitif olmasının, parantez içindeki ifadenin pozitif olmasına bağlı olduğu açıkça görülmektedir. Yine q değerinin negatif olması, parantez içindeki ifadenin negatif olmasına bağlıdır. Aşağıdaki simetrik determinant da, yukarıda parantez içindeki ifadenin negatif işaretlisidir:

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix}=2h\alpha\beta-a\beta^2-b\alpha^2$$

Buna göre $\alpha u+\beta v=0$ kısıtı altında q ifadesi,

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix}>0 \quad \text{ise mutlak maksimum,}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix}<0 \quad \text{ise mutlak minimumdur.}$$

Yukarıdaki determinantda, birinci sıra ve birinci sütunda kısıt katsayılarının yer aldığına, geride kalan determinant elemanlarının ($\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix}$) ise fonksiyonun katsayıları olduğuna dikkat ediniz. Elde edilen sonuçların d^2z ve $g\,(x,y)=c$ kısıtı ile karşılaştırılması sonucunda **çitlenmiş Hessian determinantı** elde edilir: (Chiang 1994, s: 382)

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & a & h \\ \beta & h & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} & f_{xy} \\ g_y & f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\left|\bar{H}\right|$$

<u>Örnek 8.9</u> $z=80x-2x^2-xy-3y^2+100y$ fonksiyonunun, $x=y/2$ kısıtı altında uç değerlerini araştıralım.

Kısıtı, $2x-y=0$ şeklinde yazarak Lagrange fonksiyonunu oluşturalım.

$$L(x,y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y + \lambda\ (2x - y)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = f_x = 80 - 4x - y + 2\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = f_y = -x - 6y + 100 - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = f_\lambda = 2x - y = 0$$

Bu 3 eşitlikten fonksiyonun kritik noktası (8.75;17.50) bulunur. Bu noktada fonksiyonun aldığı değer (1225) maksimum mudur, minimum mudur? Bunu test etmek için ikinci mertebe kısmî türevleri alalım:

$$f_{xx} = -4$$
$$f_{yy} = -6$$
$$f_{xy} = f_{yx} = -1$$

Çitlenmiş *Hessian* aşağıdaki gibidir:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 32 > 0$$

Buradan, kritik noktada fonksiyonun maksimuma ulaştığı (z = 1225) anlaşılmaktadır. Şekil 8.10'da kalın kesik çizgi, fonksiyonun serbest şartlarda maksimum değerini, ince kesik çizgi ise kısıtlamalı maksimum değerini göstermektedir. Bazı hallerde bu iki maksimum aynı değere sahip olsa da genelde kısıtlamalı maksimum, serbest maksimumdan daha küçük bir değere sahiptir. Ancak hiç bir zaman kısıtlamalı maksimum, serbest maksimumdan daha büyük bir değere sahip olamaz.

Örnek 8.10 $z = x^2 + xy$ fonksiyonunun, $x + 2y = 10$ kısıtı altında uç noktalarının varlığını araştıralım.

$$L\ (x,y) = x^2 + xy + \lambda\ (10 - x - 2y)$$

$$L_x = 2x + y - \lambda = 0$$
$$L_y = x - 2\lambda = 0$$
$$L_\lambda = 10 - x - 2y = 0$$

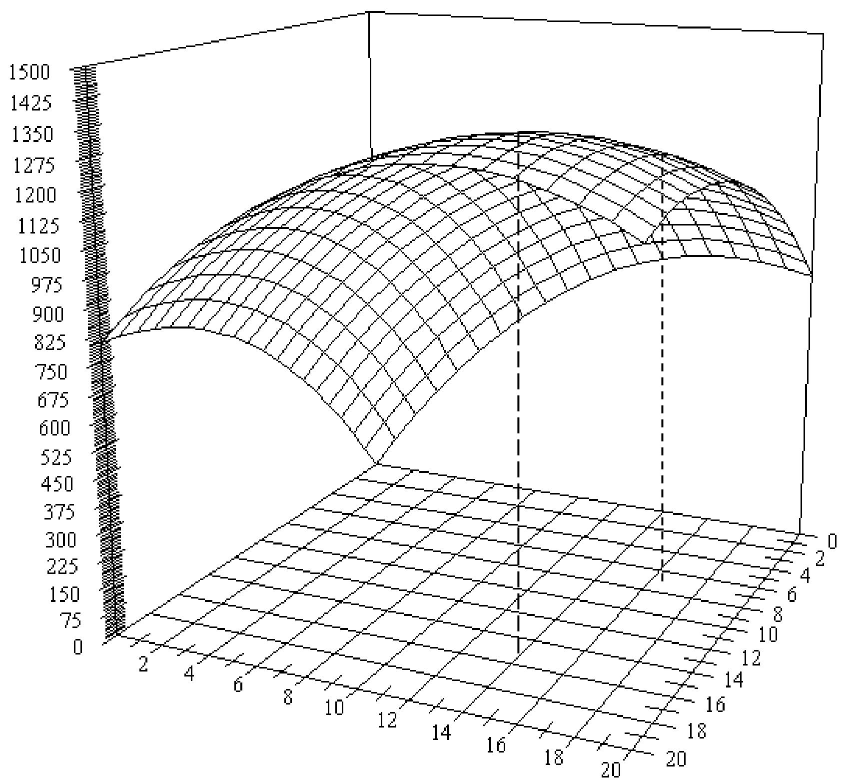
Buradan birinci mertebe şartlarını sağlayan değerler; $x = -5$; $y = 15/2$ ve $\lambda = -5/2$ elde edilir. Kritik noktada (-5;15/2) fonksiyonun (z) aldığı değer -25/2 dir. Bu noktanın bir ekstremum olup olmadığını anlamak için yeterli koşula bakılmalıdır. Bu amaçla alınan ikinci mertebe ve çapraz kısmî türevler aşağıda verilmiştir:

$f_{xx} = 2; \quad f_{yy} = 0; \quad f_{xy} = f_{yx} = 1$

Bu değerler bulunduktan sonra çitlenmiş Hessian yazılabilir:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(0-2) + 2(1-4) = -4 < 0$$

Hessian determinantının negatif olması, belirlenen noktada (-5; 15/2) fonksiyonun aldığı değerin (-25/2) minimum olduğunu göstermektedir.



Şekil 8.10 Kısıtlayıcı ($x = y/2$) Altında, $z = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ Fonksiyonunun Optimizasyonu